

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Шолохов Олексій Вікторович

УДК 519.8:629.7

**РОБАСТНЕ ЕЛІПСОЇДАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ ЛІНІЙНИХ
КЕРОВАНИХ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНИМИ ЗБУРЕННЯМ ТА ЗАВАДОЮ**

Спеціальність 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» МОН України

Науковий керівник: Чл.-кор. НАН України, доктор технічних наук, професор
Панкратова Наталія Дмитрівна,
Інститут прикладного системного аналізу
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
заступник директора з наукової роботи

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Наконечний Олександр Григорович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Шевченко Володимир Миколайович,
Інститут космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, старший науковий співробітник відділу керування динамічними системами

Захист відбудеться «10» грудня 2019 о 15 годині 00 хвилин на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.002.03 при Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ-56, проспект Перемоги, 37, корпус 35, аудиторія 001.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ-56, проспект Перемоги, 37.

Автореферат розісланий 7 листопада 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради

В. О. Капустян

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження.

Оцінювання станів динамічних систем в фазовому просторі станів завжди було необхідним для прийняття рішень. В більшості випадків ці системи функціонують в умовах невизначеності, яка може мати стохастичну або нестохастичну природу. Якщо система керована, отриману оцінку стану системи використовують для керування її станом для досягнення поставленої цілі керування. Тому розробка методів оцінювання, пристосованих для систем певного класу, функціонуючих в умовах невизначеності, є актуальною.

Класичним розділом теорії керування, пов'язаним з рішенням проблеми оцінювання в умовах імовірнісної невизначеності, є стохастична теорія керованих систем. Істотний внесок у створення й розвиток цієї теорії внесли Вінер Н., Скороход А. В., Ширяев А. М., Калман Р., Черноусько Ф. Л., Цыпкин Я. З., Фельдбаум О. А. та інші.

Але на практиці часто ймовірнісні характеристики невизначених величин – зовнішніх збурень, діючих на об'єкт, та погрішність вимірювань – невідомі. Більше того, невідомо, чи мають ці величини стохастичну природу. Тому закономірним з'явилося виникнення й розвиток нестохастичного підходу до рішення задач керування і оцінювання в умовах невизначеності, при якому не робиться припущення щодо стохастичної природи невизначеності. Цей напрямок був розвинений у роботах Красовського М. М., Schweppe F. C., Schlaepfer F. M., Куржанського О. Б., Лідова М. Л., Черноусько Ф. Л., Кунцевича В. М., Пшеничного Б. М., Кириченко М. Ф., Наконечного О. Г., Бакана Г. М., Личака М. М., Milanese M., Vicino V., Norton J. P., Favier G. та інших.

Серед методів нестохастичного оцінювання важливе місце займають методи гарантованого множинного оцінювання. Перевагою таких методів є можливість одержання у кожний момент часу поряд із точковою оцінкою вектора оцінюваних змінних стану ще і множинної оцінки – деякої області, яка гарантовано містить шуканий вектор і послідовно уточнюється на підставі результатів вимірів поточної інформації про невизначені величини.

При еліпсоїдальному оцінюванні ця область апроксимується багатовимірним еліпсоїдом, що дозволяє уникнути стрімкого зростання об'єму даних, які в такому випадку описують множину можливого стану системи і мають зберігатися у пам'яті ЄОМ для обчислення множини досяжності динамічної системи зі зміною часу. До того ж, еліпсоїд має менший об'єм параметрів порівняно з іншими множинами канонічних форм, хоч таке рішення і збільшує міру невизначеності стану системи. Еліпсоїдальний спосіб апроксимації множинної оцінки можливого стану керованих систем почали розвивати: Красовский М. М., Schweppe F. C., Kahan W., Bertsekas D. P., Rhodes I. B., Шор Н.З., Гершович В. І., Стеценко С. І., Куржанський О.Б. та інші; подовжили Черноусько Ф. Л., Овсеєвич О. Й., Бакан Г. М., Волосов В. В., Куссуль Н. М., Сальников М. М., Рубльов Б. В., Петунін Ю. І., Стецюк П. І., Поляк Б. Т., Фурасов В. Д. та багато інших; зараз відомі роботи Сальникова М. М., Гусева М. І., Стецюка П. І., Шматкова А. М. та інших.

Одним з недоліків методів гарантованого оцінювання є їх чутливість до порушень прийнятих апіорі припущень, а саме: невірному завданню апіорної області змінних стану, непередбаченої стрибкоподібної зміні границі зовнішнього збурення системи, збоїв у роботі вимірювальної апаратури – що може привести до так званої «розбіжності» алгоритму оцінювання. Це істотно обмежує практичне застосування алгоритмів гарантованого оцінювання. Тоді особливу актуальність набувають методи оцінювання, здатні зберігати працездатність при вищенаведених випадках.

Ефективним рішенням зазначеної проблеми є введення в процес оцінювання метода адаптації – процедури ідентифікації, що на підставі поточних вимірювань, отриманих в процесі оцінювання, здатна корегувати апіорну інформацію – змінювати припущення щодо зовнішніх збурень або погрішності вимірювання.

Для рішення цієї задачі – оцінювання стану лінійних керованих систем, що функціонують в умовах нестатистично заданої невизначеності, в даній дисертаційній роботі запропоновано новий метод робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем. Ефективність розробленого методу ілюструється на прикладі оцінювання кутових координат штучного супутника Землі для керування його кутовим положенням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» відповідно до планів наступних науково-дослідних тем:

- Розробка інструментарію діагностування гарантованого функціонування складних технічних систем в умовах невизначеностей та дестабілізуючих факторів ризику. Номер державної реєстрації НДР: 0117U004281;
- Побудова інформаційно-аналітичної платформи сценарного аналізу на основі великих обсягів слабкоструктурованої інформації. Номер державної реєстрації НДР: 0118U003779.

Мета і задачі дослідження. Метою є розробка методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем, що функціонують в умовах нестатистично заданої невизначеності, тобто їх стан збурюється обмеженням за величиною зовнішнім збуренням, а вимірювання змінної стану, за якою система є спостережуваної, містить обмежену за величиною похибку вимірювання. Цей метод має забезпечувати робастність процесу оцінювання щодо порушення апіорних припущень відносно зовнішніх збурень і похибки вимірювання стану системи, тобто відновлення оцінювання після декількох обробок вимірювань, «несумісних» з попередньою оцінкою, та збереження керування системою в цьому випадку.

Для досягнення мети дослідження необхідно було вирішити такі завдання:

- проаналізувати наукові першоджерела щодо обґрунтування актуальності теми дослідження: проаналізувати розвиток методів оцінювання; альтернативні та суміжні методи оцінювання; сучасний стан гарантованого оцінювання; умови,

за яких застосування гарантованих методів є безальтернативним; переваги і недоліки саме еліпсоїдального оцінювання порівняно з іншими методами гарантованого оцінювання; практичне застосування еліпсоїдального оцінювання;

- розробити метод еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським двох множин – еліпсоїду початкового стану і відрізка за двома критеріями: за об'ємом і за сумою квадратів півосей еліпсоїду, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи;
- розробити субоптимальний метод еліпсоїдальної апроксимації зазначеної вище суми двох множин;
- формалізувати умови «сумісності» двох множин: множини вимірювання стану системи – «гіпершару» і множини досяжності – еліпсоїду;
- розробити робастну властивість метода еліпсоїдального оцінювання шляхом адаптивного збільшення апріорного обмеження погрешності вимірювання у випадку настання «несумісності»;
- розробити спосіб субоптимальної еліпсоїдальної апроксимації перетину двох множин: досяжності і вимірювання системи, в якому мінімізується або об'єм, або сума квадратів півосей еліпсоїду оцінки;
- дослідити зв'язок між параметрами вимірювача, погрішністю вимірювання, розмірністю простору стану системи і мінімально можливою ступенем невизначеності стану системи, яку можна за таких умов отримати у вигляді мінімального за об'ємом еліпсоїду оцінки;
- застосувати розроблений метод оцінювання для вирішення задачі визначення положення нерухомого об'єкту за декількома його пеленгами і задачі оцінювання параметрів орієнтації штучного супутника Землі.

Об'єкт дослідження – процеси функціонування лінійних керованих систем при їх збуренні по одному каналу, за яким система є керованою, та при вимірюванні тільки однієї змінної стану, за якою система є спостережуваною.

Предмет дослідження – моделі і методи оцінювання станів систем у фазовому просторі станів.

Методи дослідження. Системний аналіз, теорія оцінювання, матрична алгебра, чисельні методи, теорія звичайних диференціальних рівнянь, математичне і комп'ютерне моделювання, теорія прийняття рішень.

Наукова новизна одержаних результатів. На основі проведених у дисертаційній роботі досліджень запропоновано метод робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних систем з обмеженими збуренням та завадою. Наукова новизна роботи визначається наступними теоретичними результатами, отриманими автором:

Уперше:

- розроблено новий спосіб побудови мінімальної еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським двох множин – еліпсоїду і відрізка; цей спосіб відрізняється меншою трудомісткістю обчислень порівняно з відомим способом, але також забезпечує мінімальне значення критерію оптимальності – мінімум об'єму еліпсоїду;
- розроблено субоптимальний спосіб еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським двох множин – еліпсоїду і відрізка, в основу якого покладено нерівність Канторовича. Цей спосіб є набагато простішим порівняно з оптимальним і таким, що в окремому випадку, який часто трапляється на практиці; дає оптимальний еліпсоїд;
- отримано нерівність, яка зв'язує параметри вимірювача, максимальну похибку вимірювання, розмірність фазового простору станів системи і мінімально можливу за об'ємом еліпсоїдальну оцінку стану системи – що забезпечує формування вимог до класу точності вимірювача при прийнятій невизначеності оцінки стану системи.

Удосконалено:

- метод прийняття рішень щодо урахування результатів вимірів стану спостережуваної системи для побудови її еліпсоїдальної оцінки;
- робастні властивості методу еліпсоїдального оцінювання.

Практичне значення одержаних результатів. Розв'язано задачу оцінювання положення нерухомого об'єкту за декількома його пеленгами і задачу оцінювання та керування кутовим положенням штучного супутника Землі за допомогою розробленого методу в умовах нестатистично заданої невизначеності. При цьому показано збереження керування супутником при перерві надходжень вимірювань. Це рішення дозволяє зекономити на бортовому обладнанні, а саме: використовувати менш точні прилади визначення кутового положення штучного супутника Землі.

Усі теоретичні розробки, виконано автором самостійно.

Розроблений метод оцінювання доведено до конкретних алгоритмів, які реалізовані у програмному забезпеченні, що застосовується у виробництві реальних приладів, які виробляються на Казенному підприємстві спеціального приладобудування «Арсенал» Державного космічного агентства України. Це підтверджується «Актом впровадження результатів дисертаційної роботи Шолохова О. В.» за №717/70-12/2 від 25.04.18. Розроблений метод оцінювання також впроваджено в навчальний процес кафедри математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», що підтверджується довідкою.

Особистий внесок здобувача. Більшість наукових результатів, що складають основний зміст роботи та становлять наукову новизну, отримані здобувачем особисто. Зокрема у праці [1] здобувачем доведено твердження щодо оптимальних значень параметрів, які мінімізують еліпсоїд, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи, яка є сумою за Мінковським початкового еліпсоїду

стану і відрізка – множини зовнішнього збурення; розроблено математичну та обчислювальні моделі цієї апроксимації та проведено комп'ютерне моделювання для порівняння з уже відомим способом апроксимації. У праці [2] здобувачем доведено лему про покриття перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару» – множини вимірювань. В праці [3], також написаної особисто, запропоновано, теоретично обґрунтовано і доведено спрощений метод еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності лінійної керованої системи на підставі нерівності Канторовича; запропоновано лему щодо надання робастності методу апроксимації перетину еліпсоїду множини досяжності і «гіпершару» множини вимірювання. У праці [4] здобувачем висунуто і доведено теорему про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів статичного еліпсоїдального оцінювання. У праці [5] здобувачем вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі.

Апробація результатів дисертації. Наукові та практичні результати доповідались на семінарах та наукових конференціях:

1. Аспірантських семінарах при Навчально-науковому комплексі “Інститут прикладного системного аналізу” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут” (Київ, 2006, 2008, 2013);
2. Школі-семінарі для молодих науковців: «Наукові космічні дослідження». 7-13 вересня 2006р, м. Євпаторія;
3. XXV-ї научно-технической конференции памяти Н.Н. Острякова. 10-12 октября 2006 г, г. Санкт-Петербург, Россия;
4. Міжнародної науково-технічної конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і прикладні аспекти інформаційних технологій» (ISDMIT'2007). 15-18 травня 2007р., м. Євпаторія;
5. Міжнародної науково-технічної конференції *4th IEEE Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. IDAACS 2007*
6. Науковому семінарі на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2008);
7. 1-ї Всеукраїнської науково-технічної конференції «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 11-12 грудня 2014р, м. Харків;
8. 15-ї Української конференції з космічних досліджень. 24-28 серпня 2015р, м. Одеса;
9. 2-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 06-07 грудня 2018р., м. Харків

Публікації. Основні положення дисертаційної роботи опубліковані в 12 наукових публікаціях: 5 наукових статтях в провідних фахових виданнях, (з них 3 статті у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз), 1 статтю у збірнику праць іноземної міжнародної конференції, 6 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, переліку умовних позначень, чотирьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел і 3-х додатків. Роботу викладено на 145 сторінках і містить 111 сторінок основної частини, 12 рисунків, 2 таблиці і список використаних джерел із 218 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність розробки методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем в умовах невизначеності за скалярними вимірюваннями на підставі системного підходу; визначені мета, об'єкт, предмет і методи дослідження; показано зв'язок з науковими програмами, планами; наведено наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, висвітлено особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за тематикою даної роботи та спорідненими питаннями; висвітлені результати вирішення схожих проблем, які були отримані іншими авторами. Зокрема, наведено огляд сучасного стану гарантованого оцінювання, сучасні публікації щодо цього питання. Особлива увага надана еліпсоїдальному оцінюванню. Проаналізовано також роботи присвячені інтервальним методам оцінювання. Проводиться огляд робіт щодо практичного застосування методів гарантованого оцінювання. З проведеного огляду випливає, що існує велика потреба у методах оцінювання, які мають властивість робастності щодо порушень апріорних припущень стосовно зовнішніх збурень, діючих на спостережувану систему та похибок вимірювання змінних її стану, зокрема при нестатистично заданій невизначеності. На підставі аналізу проблеми по сучасним публікаціям розроблено і наведено блок-схему системного підходу за якою структурована робота.

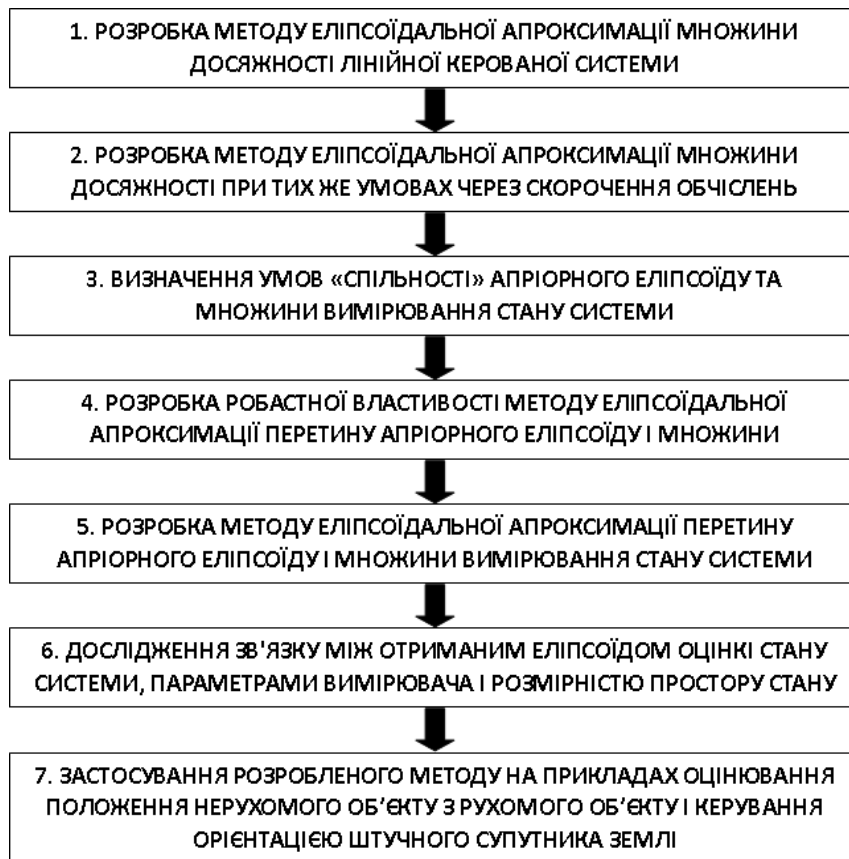


Рис. 1. Блок-схема системного підходу до розробки методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів керованих лінійних систем з обмеженими збуренням та завадою.

У **другому розділі** вирішується задача побудови мінімальної за об'ємом еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності лінійної керованої системи, тобто апроксимації суми за Мінковським апріорного еліпсоїду початкового стану системи і відрізка, що є множиною можливих значень, яких може набувати зовнішнє збурення, що діє на систему через канал керування – по одній фазовій координаті. Спосіб, яким вирішено задачу, простіш ніж відомий, в якому необхідно обидві матриці приводити до діагонального вигляду. На основі цього способу з залученням нерівності Канторовича запропоновано спрощений спосіб апроксимації – субоптимальний, що є набагато простішим порівняно з оптимальним і, в окремому випадку, який часто трапляється на практиці, результат, отриманий таким способом, співпадає з оптимальним. Це може бути вигіднішим на практиці, якщо обчислювальні засоби обмежено за потужністю або за енерговитратами.

Лінійна керована система описується кінцево-різницевиими рівняннями

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + w_j, j \in T_0, T_0 = \{j : 0 \leq j < \infty\}, \quad (1)$$

де $x_j \in R^n$ – вектор змінних стану системи; $A \in R^{n \times n}$ – матриця динаміки системи, $\{B \in R^n, u_j \in R^1, j \in T_0\}$ – керування системою; пара A, B – керована; $w_j = \zeta_j f_j, f_j \in R^n, \|f_j\| = 1, \zeta_j \in R^1, \forall j \in T_0, |\zeta_j| \leq d, d \geq 0$ – зовнішнє збурення, яке уособлює собою відрізок, і обмеження на яке записується через опорні функції:

$$\{w_j: |l^T w_j| \leq d \sqrt{l^T f_j f_j^T l}, \forall l \in R^n\}. \quad (2)$$

Еліпсоїдальну множину, до якої належить вектор x_0 змінних початкового стану системи (1), записуємо у вигляді квадратичної форми

$$E_0 = \{x_0: (x_0 - \bar{x}_0)^T H_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \leq 1\}, \quad (3)$$

де матриця $H_0 = H_0^T > 0, H_0 \in R^{n \times n}$.

Рух системи визначається відомим керуванням і тому в оцінці відхилення стану системи від керованого являє собою центр шуканого еліпсоїду оцінки:

$$\bar{x}_{j+1} = A\bar{x}_j + Bu_j. \quad (4)$$

Отже, необхідно побудувати на $j+1$ -кроці еліпсоїдальну апроксимацію множини досяжності системи (1) під дією зовнішнього збурення w_j , тобто отримати матрицю H_{j+1} еліпсоїду E_{j+1} . Має місце

Лема 1. Матриця H_{j+1} шуканого еліпсоїду E_{j+1} записується наступним чином

$$H_{j+1}(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_{1,j} f_j f_j^T d^2 + \gamma_{2,j} H_{j+1|j}); \gamma_{1,j}^{-1} + \gamma_{2,j}^{-1} = 1, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \quad (5)$$

де: $H_{j+1|j} = AH_j A_j^T$ – матриця еліпсоїду, який динамічно утворюється з еліпсоїду E_j під дією властивостей системи протягом часу між j і $j+1$ відліком, – або

$$H_{j+1}(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_{2,j} \sqrt{H_{j+1|j}} R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} f_j \right) \sqrt{H_{j+1|j}}, \quad (6)$$

$$R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^T} f_j \right) = I - (1 - \beta_j^{-2}) \sqrt{H_{j+1|j}^{-T}} f_j \left(f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j \right)^{-1} f_j^T \sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} \quad (7)$$

Тут: $R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^T} f_j \right)$ – оператор стискання у напрямку $\sqrt{H_{j+1|j}^T} f_j$; $\beta_j^{-2} = 1 + \gamma_{1,j} \gamma_{2,j}^{-1} \kappa_j^2$ – коефіцієнт стискання; $\kappa_j^2 = f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j d^2$.

Геометричне представлення потрібної операції еліпсоїдальної апроксимації наведено на рис. 2:

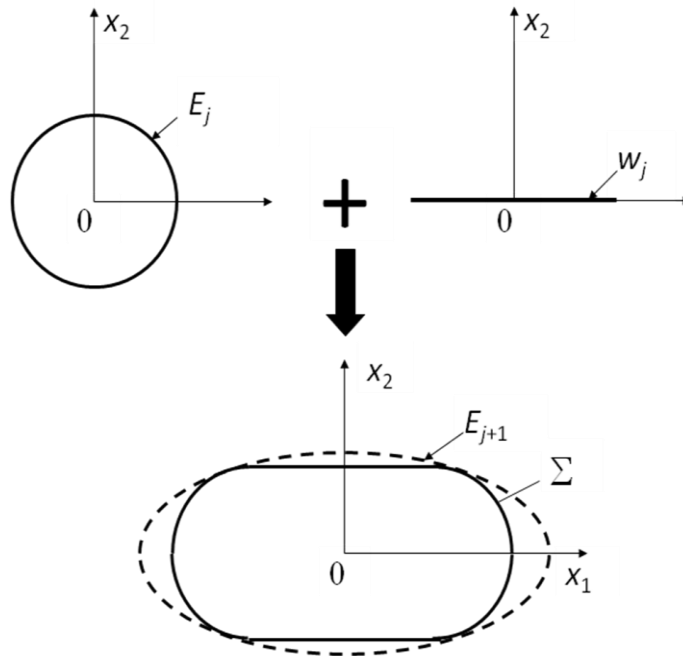


Рис. 2. Еліпсоїдальна апроксимація суми за Мінковським двох множин: еліпсоїду початкового стану і відрізка – множини можливих значень зовнішнього збурення.

На рис. 2: x_1, x_2 – змінні стану; E_j – еліпсоїд початкового стану системи; w_j – множина можливих значень зовнішнього збурення; Σ – сума за Мінковським еліпсоїду E_j та відрізка w_j ; E_{j+1} – апроксимуючий еліпсоїд.

Твердження 1. Шукані значення $\gamma_{1,j}^*, \gamma_{2,j}^*$ (5), які доставляють мінімум об'єму E_{j+1} – мінімізують детермінант матриці H_{j+1} , знаходяться у вигляді єдиного додатнього кореня δ_j^* квадратного рівняння

$$n\delta_j^2 + \kappa_j^2(n-1)\delta_j - \kappa_j^2 = 0, \quad \delta_j = \gamma_{2,j}\gamma_{1,j}^{-1}, \quad (8)$$

де n – розмірність простору стану системи.

Зауважимо, що можна використовувати корінь δ_j^* в виразі (5) безпосередньо. Тоді

$$H_{j+1}(\delta_j^*) = (1 + \delta_j^*)(H_{j+1|j} + d^2 f_j f_j^T / \delta_j^*). \quad (9)$$

На основі відомої нерівності Канторовича про власні числа додатньо-визначеної симетричної матриці $C \in R^{n \times n}$: $1 \leq x^T C x x^T C^{-1} x \leq 0,25 \left(\sqrt{\lambda_1 \lambda_N^{-1}} + \sqrt{\lambda_N \lambda_1^{-1}} \right)^2$, де: $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$ – власні числа, $x \in R^n$ – довільний одиничний вектор, спрощується вираз $\kappa_j^2 = f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j d^2 \approx \tilde{\kappa}_j^2 = (f_j^T f_j d)^2 (f_j^T H_{j+1|j} f_j)^{-1}$ і субоптимальні значення $\tilde{\gamma}_{1,j}, \tilde{\gamma}_{2,j}$ знаходяться у вигляді єдиного додатнього кореня $\tilde{\delta}_j^*$ квадратного рівняння

$$n\tilde{\delta}_j^2 + \tilde{\kappa}_j^2(n-1)\tilde{\delta}_j - \tilde{\kappa}_j^2 = 0, \quad \tilde{\delta}_j = \tilde{\gamma}_{2,j}\tilde{\gamma}_{1,j}^{-1}. \quad (10)$$

Проводиться чисельне моделювання для порівняння значень коренів з детермінантів оптимального і субоптимального еліпсоїдів, побудованих на деякому проміжку дискретного часу згідно рівнянь (8) та (9). Задаються початковий еліпсоїд $H_0 = \text{diag}[100; 400; 900]$; матриця динаміки A в формі Фробеніуса з власними числами $\lambda_l = 0,75; 0,5; -0,5$; $l = \overline{1,3}$, що забезпечують стійкість системи (4). Нижній рядок матриці A : $[a]_{3l} = [-0,1875; 0,25; 0,75]$, $l = \overline{1,3}$. Результати наведено на рис. 3.

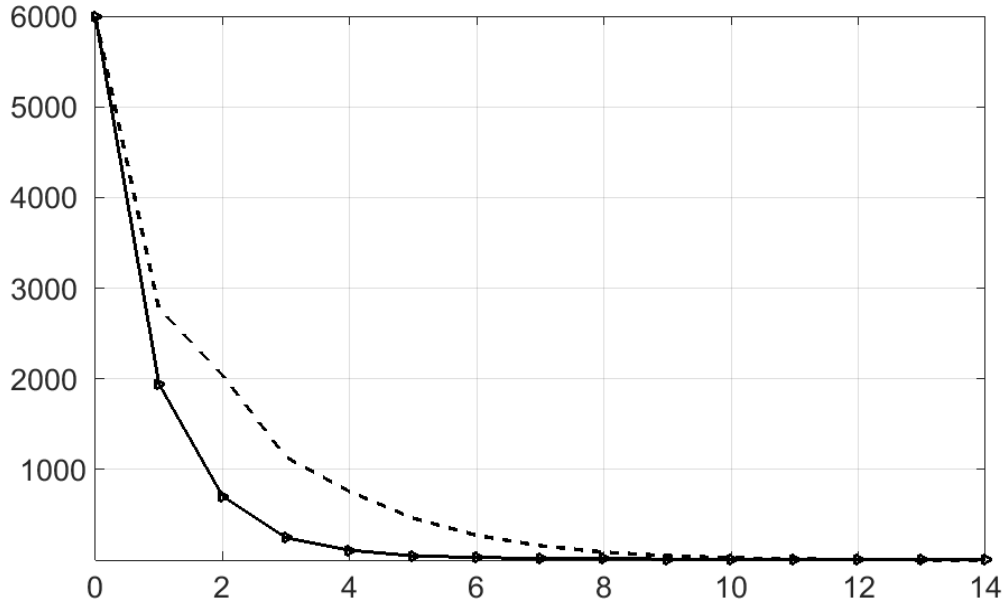


Рис. 3. Порівняння об'ємів оптимального і субоптимального еліпсоїдів: суцільна лінія – розподіл оптимального оцінювання; лінія з трикутниками (співпадає з суцільною лінією) – розподіл оптимального оцінювання іншим способом; штрих-пунктирна лінія – розподіл субоптимального оцінювання.

З **леми 1** отримано вираз для параметра δ_j^* еліпсоїду, що апроксимує суму двох еліпсоїдів, і є мінімальним за сумою квадратів його півосей, тобто його матриця має мінімальний слід. Для цього доведено

Твердження 2. Матриця еліпсоїду, що апроксимує суму двох еліпсоїдів, і є мінімальним за сумою квадратів його півосей, має наступний вигляд:

$$H_{j+1}(\delta_j^*) = (1 + \delta_j^*)(H_{j+1|j} + Q_j / \delta_j^*), \quad (11)$$

де Q_j – матриця еліпсоїдальної множини, що обмежує зовнішнє збурення:

$$Q_j \in R^{n \times n}, \quad Q_j = Q_j^T \geq 0, \quad w_j^T Q_j w_j \leq \rho(Q_j), \quad \forall \|w_j\| = 1, \quad \delta_j^* = \sqrt{\text{trace} Q_j / (\text{trace} H_{j+1|j})}.$$

Зауваження: Якщо множина зовнішнього збурення уявляє собою відрізок, тобто маємо для оптимізації вираз (9), то $\delta_j^* = \sqrt{f^T f d^2 (\text{trace} H_{j+1|j})^{-1}}$.

Третій розділ присвячено розробці математичного апарату для використання наявних вимірювань однієї змінної стану або деякої лінійної комбінації змінних стану спостережуваної системи для уточнення її стану за критерієм, який мінімізує

об'єм апроксимуючого еліпсоїду множинної оцінки; вирішення проблеми чутливості методу оцінювання до порушень прийнятих апіорі припущень, тобто надання методу робастності; забезпеченню відсутності особливих випадків у процесі оцінювання – обчислювальної нестійкості, ділення на нуль і появи від'ємних та уявних значень параметрів у виразах; дослідженню співвідношень між параметрами еліпсоїду оцінки, розміром простору станів системи, параметрами вимірювача і погрішністю вимірювання.

Вимірювання описуються наступним рівнянням

$$y_{j+1} = h^T x_{j+1} + \eta_{j+1}, |\eta_{j+1}| \leq c, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

де $y_{j+1} \in R^1$, $h \in R^n$, пара (A, h) спостережувана, $\eta_{j+1} \in R^1$ – похібка вимірювань.

Рівняння (9) визначає в просторі R^n множину вимірювань – «гіпершар»

$$S(y_{j+1}, x_{j+1}) = \{x_{j+1} : (y_{j+1} - h^T x_{j+1})^2 \leq c^2\}. \quad (13)$$

Можливі чотири випадки взаємного розташування еліпсоїду множини досяжності і «гіпершару» множини спостереження:

1. «Гіпершар» повністю містить еліпсоїд;
2. «Гіпершар» перетинається з еліпсоїдом обома обмежуючими площинами;
3. «Гіпершар» перетинає еліпсоїд тільки однією обмежуючою площиною;
4. «Гіпершар» і еліпсоїд не перетинаються.

Для полегшення уявлення на рис. 4 дано зображення взаємного розташування цих множин.

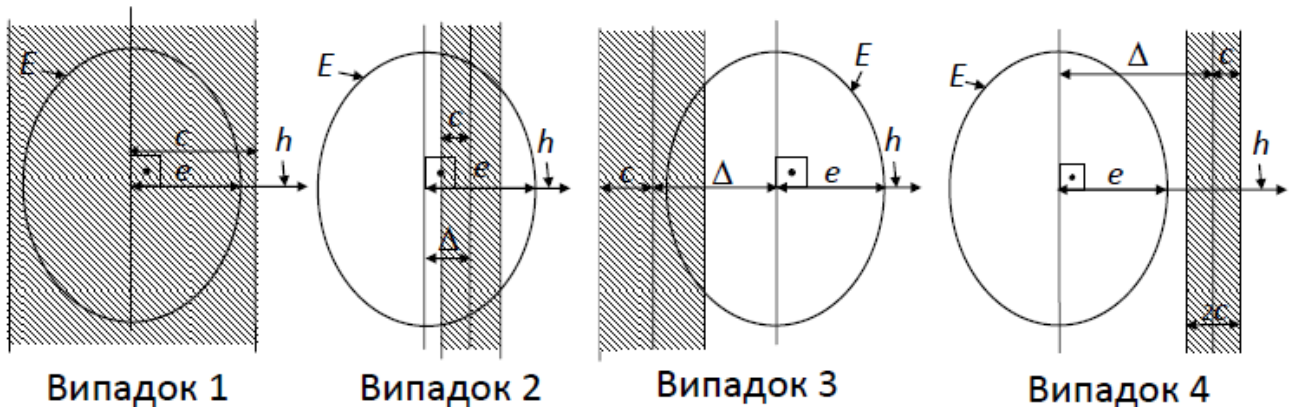


Рис. 4. Взаємне розташування апіорного еліпсоїду E_{j+1} і «гіпершару» S_{j+1} .

На рис. 4 введено позначення: $\Delta_{j+1} = y_{j+1} - h^T \bar{x}_{j+1}$, $e_{j+1} = \sqrt{h^T H_{j+1} h}$. Для зручності далі будемо застосовувати нормовані (безрозмірні) параметри: $\sigma_{j+1} = \frac{\Delta_{j+1}}{e_{j+1}}$,

$$\chi_{j+1} = \frac{c}{e_{j+1}}.$$

Тоді можемо записати випадки взаємного розташування двох множин через введені параметри:

Випадок 1: $c - |\Delta_{j+1}| \geq e_{j+1} \Rightarrow \chi_{j+1} - |\sigma_{j+1}| \geq 1;$

Випадок 2: $c + |\Delta_{j+1}| < e_{j+1} \Rightarrow \chi_{j+1} + |\sigma_{j+1}| < 1;$

Випадок 3: $c - |\Delta_{j+1}| < e_{j+1} \cup c + |\Delta_{j+1}| > e_{j+1} \Rightarrow \chi_{j+1} - |\sigma_{j+1}| < 1 \cup \chi_{j+1} + |\sigma_{j+1}| > 1;$

Випадок 4: $|\Delta_{j+1}| > c + e_{j+1} \Rightarrow |\sigma_{j+1}| > \chi_{j+1} + 1.$

У **випадку 1** залишаємо попередній еліпсоїд; у **випадку 2** за вимірюванням (9) – y_{j+1} і апіорним еліпсоїдом (5) – E_{j+1} будується апостеріорний еліпсоїд E_{j+1} з меншим об'ємом або сумою квадратів півосей, ніж у апіорного еліпсоїду; **випадок 3** в відомому рішенні запропоновано зводить до **випадку 2**, для чого перевизначається Δ_{j+1} і напівширина c «гіпершару» S_{j+1} як показано на рис. 5.

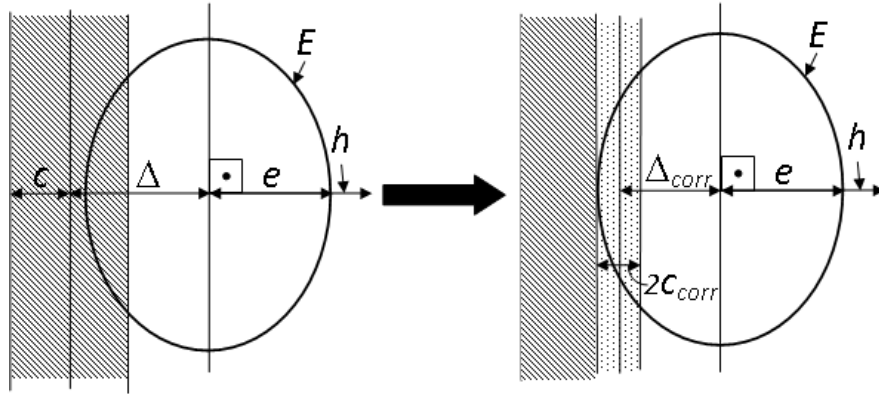


Рис. 5. Перевизначення параметрів вимірювання y_j .

Пояснення апроксимації перетину еліпсоїду і «гіпершару» наведено на рис. 6

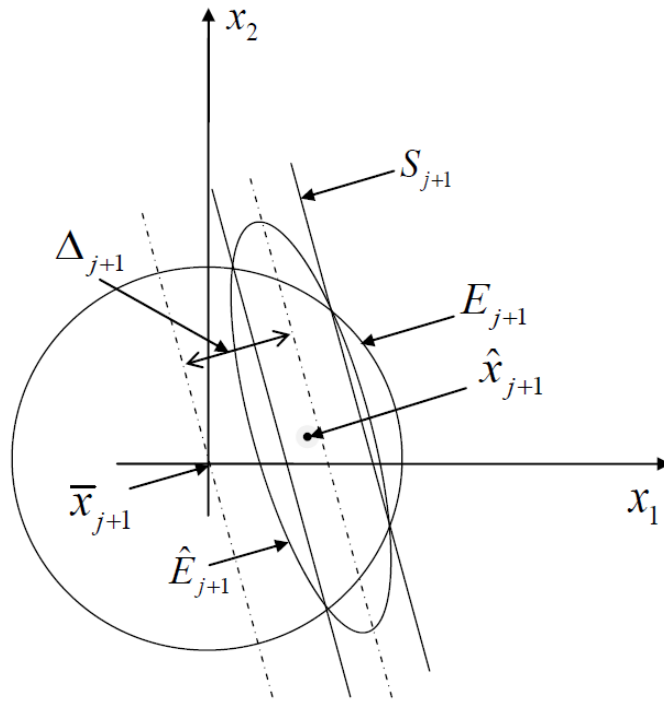


Рис. 6. Еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду E_{j+1} і «гіпершару» S_{j+1} .

У **випадку 4** маємо «несумісність» вимірювання і апіорного еліпсоїду і тому застосовуємо робастну властивість оцінювання.

Відоме рішення щодо надання робастної властивості методу оцінювання полягає в тому, що апіорний еліпсоїд масштабується таким чином, щоб його границя дотикалась середньої лінії «гіпершару». Цей підхід застосовується при припущенні, що зовнішнє збурення, що діє на систему, перебільшує апіорно задану границю. В роботі розроблено інший підхід: запропоновано збільшувати «гіпершар» до середини апіорного еліпсоїду, припускаючи, що перебільшено апіорно задану границю погрішності вимірювання.

Для представлення двох підходів до робастності на рис. 7 наведено їх зображення.

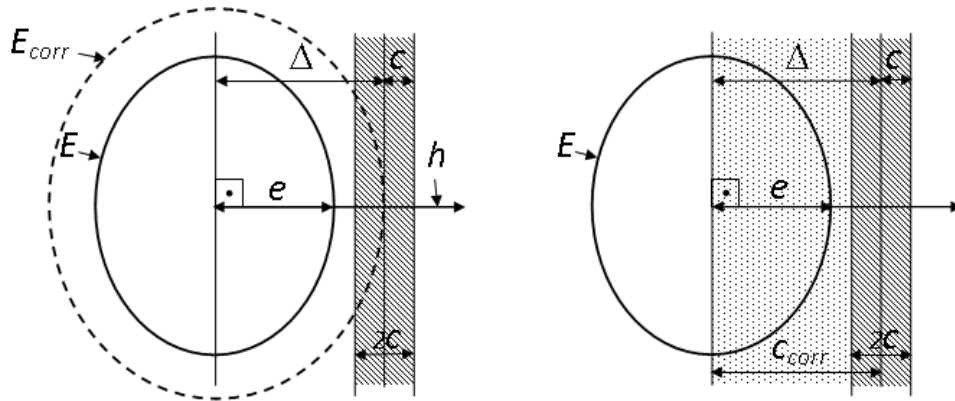


Рис. 7. Два підходи до надання методу оцінювання робастності.

Доцільність другого підходу обґрунтовується наявністю практичних задач. Наприклад, коли у процесі перехвату цілі керованою ракетою, якщо атаку виявлено, з боку цілі організуються завада вимірювання її координат і кутової швидкості у просторі предметів або завада у спектрі випромінювання цілі. Також у процесі переміщення, наприклад, штучного супутника Землі по орбіті, фазові координати якого вимірюються бортовими приладами, змінюються, часто вельми швидко – навіть стрибкоподібно, характеристики фізичних полів, що є вимірювальною інформацією для бортових приладів: вектор індукції магнітного поля Землі, сонячне випромінювання, теплове випромінювання Землі або її альbedo.

Після отримання параметрів апіорного еліпсоїду або «гіпершару», перетворених згідно обраного підходу до робастності, маємо випадок 3, але зводити його до випадку 2 вже не має сенсу, оскільки необхідно отримати декілька вимірювань і оцінок поспіль, щоб визначити нову границю зовнішнього збурення або похибки вимірювання. Для цього необхідно чекати надходження випадку 2.

Для рішення задачі запропоновано і доведено лему про покриття непустих перетинів еліпсоїду і «гіпершару» у випадках 2, 3.

Лема 2. Нехай еліпсоїд $E_{j+1} = \{x_{j+1} : (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1})^T H_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1}) \leq 1\}$ і «гіпершар» $S(y_{j+1}) = \{x_{j+1} : (y_{j+1} - h^T x_{j+1})^2 \leq c^2\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, мають непустий перетин. Тоді еліпсоїд $\hat{E}_{j+1} = \{x_j : (x_j - \hat{x}_{j+1})^T \hat{H}_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \hat{x}_{j+1}) \leq r_j^2\}$ має наступні параметри:

$$\hat{x}_{j+1} = \bar{x}_{j+1} + \tau_{j+1} H_{j+1} h e_{j+1}^{-1} \sigma_{j+1}, \quad \hat{H}_{j+1} = (H_{j+1} - \tau_{j+1} e_{j+1}^{-2} H_{j+1} h h^T H_{j+1}) \alpha_{j+1}^2, \quad (14)$$

де: $\alpha_{j+1}^2 = 1 + \tau_{j+1}((1 - \tau_{j+1})^{-1} \chi_{j+1}^2 - \sigma_{j+1}^2)$, а $0 \leq \tau_{j+1} < 1$ необхідно визначити, має властивість $\hat{E}_{j+1} \supset E_{j+1} \cap S_{j+1}(y_{j+1})$.

Тут \bar{x}_{j+1} визначається виразом (4), H_{j+1} – виразом (5). Зауважимо, що в інших позначеннях і іншим шляхом подібні вирази для випадку 2 були отримані іншими авторами. Параметр τ_j , запропонований в їх рішеннях, не забезпечує оцінювання у випадку 3. В представленій тут роботі запропоновано такий вибір параметру τ_j , який дозволяє оцінювати стан системи (1) и у випадку 3 без перетворення його до випадку 2. Оцінка при цьому буде субоптимальною.

З урахуванням властивості оператору стискання: $\det R_{1-\tau_{j+1}}(\sqrt{H_{j+1}^{-1}}h) = 1 - \tau_{j+1}$, вираз для матриці \hat{H}_{j+1} з (14) перетворено на вираз для детермінанту цієї матриці: $|\hat{H}_{j+1}| = \alpha_{j+1}^{2n} (1 - \tau_{j+1}) |H_{j+1}|$. Звідки отримано функціонал, який потрібно мінімізувати:

$$J(\tau_{j+1}) = (1 - \tau_{j+1}) \alpha_{j+1}^{2n} = (1 - \tau_{j+1}) (1 + \tau_{j+1} (\chi_{j+1}^2 (1 - \tau_{j+1})^{-1} - \sigma_{j+1}^2))^n. \quad (15)$$

Відоме оптимальне рішення, що мінімізує об'єм еліпсоїдальної оцінки, отримане іншим шляхом і в інших позначеннях, можна отримати з виразу (15) продиференціювавши його по змінній τ_j , прирівнявши результат до нуля і отримав квадратне рівняння. Але оптимальне рішення містить особливість – ділення на нуль при $\sigma_{j+1} = 0$. Це потребує стежити за наближенням σ_{j+1} до нуля і при деякому значенні переходити до іншого виразу для τ_{j+1} , що є рішенням лінійного рівняння, яке отримуємо з квадратного рівняння, поклавши $\sigma_{j+1} = 0$. Крім того, це рішення потребує для **випадку 3** перевизначити Δ_{j+1} і півширину s «гіпершару» S_{j+1} таким чином, щоб перевизначений «гіпершар» не виходив за межі еліпсоїду. Тому є актуальною розробка методу субоптимальної еліпсоїдальної апроксимації перетину, який не має особливостей залежно від значення σ_{j+1} і характеру перетину, а об'єм еліпсоїду оцінки не набагато відрізняється від оптимального. Критерієм прийняття оцінки для подальшого використання є критерій інформативності:

$$\det \hat{H}_{j+1} / \det H_{j+1} = (1 - \tau_{j+1}) \alpha_{j+1}^{2n} \leq 1. \quad (16)$$

Чим він менше, тим більш ефективне вимірювання y_{j+1} для побудови еліпсоїдальної апроксимації перетину. Якщо нерівність виконується, то вимірювання y_{j+1} назовемо інформативним. В роботі запропоновано і доводяться твердження і декілька лем щодо вибору τ_{j+1} , які забезпечують ефективне використання вимірювання y_{j+1} .

Твердження 3. Нехай еліпсоїд E_{j+1} множини досяжності і “гіпершар” S_{j+1} вимірювання y_{j+1} дотикаються один одного. Тоді для того, щоб точка дотику була

центром \hat{x}_{j+1} нового еліпсоїду \hat{E}_{j+1} необхідно і достатньо виконання рівності $\tau_{j+1} = (1 + \chi_{j+1})^{-1}$.

Зауваження. Якщо треба, щоб центр нового еліпсоїду у випадку дотикання належав початковому еліпсоїду, то необхідно, щоб було $\tau_{j+1} < (1 + \chi_{j+1})^{-1}$.

Лема 3. Нехай має місце випадок 4, тобто «несумісність» початкового еліпсоїду \hat{E}_{j+1} та «гіпершару» S_{j+1} , і приймається припущення $c = |\Delta_{j+1}|$. Тоді для того, щоб вимірювання y_{j+1} було інформативним, прийmemo $\tau_{j+1} = (1 + n\chi_{j+1}^2)^{-1}$.

Лема 4. Нехай має місце випадок 2. Тоді критерій інформативності набуває значення 1 при однаковому граничному погрішності вимірювання як при оптимальному виборі τ_{j+1} , так і при виборі $\tau_{j+1} = 1 - n\chi_{j+1}^2(1 + n\sigma_{j+1}^2)^{-1}$.

На рис. 8 наведено графіки значень критерію (16) для випадку $\sigma_{j+1} = 0$ і $\sigma_{j+1} = (n-1)/(2n)$ в залежності від змінення χ_{j+1} майже від нуля і доки нерівність (16) не стане рівністю.

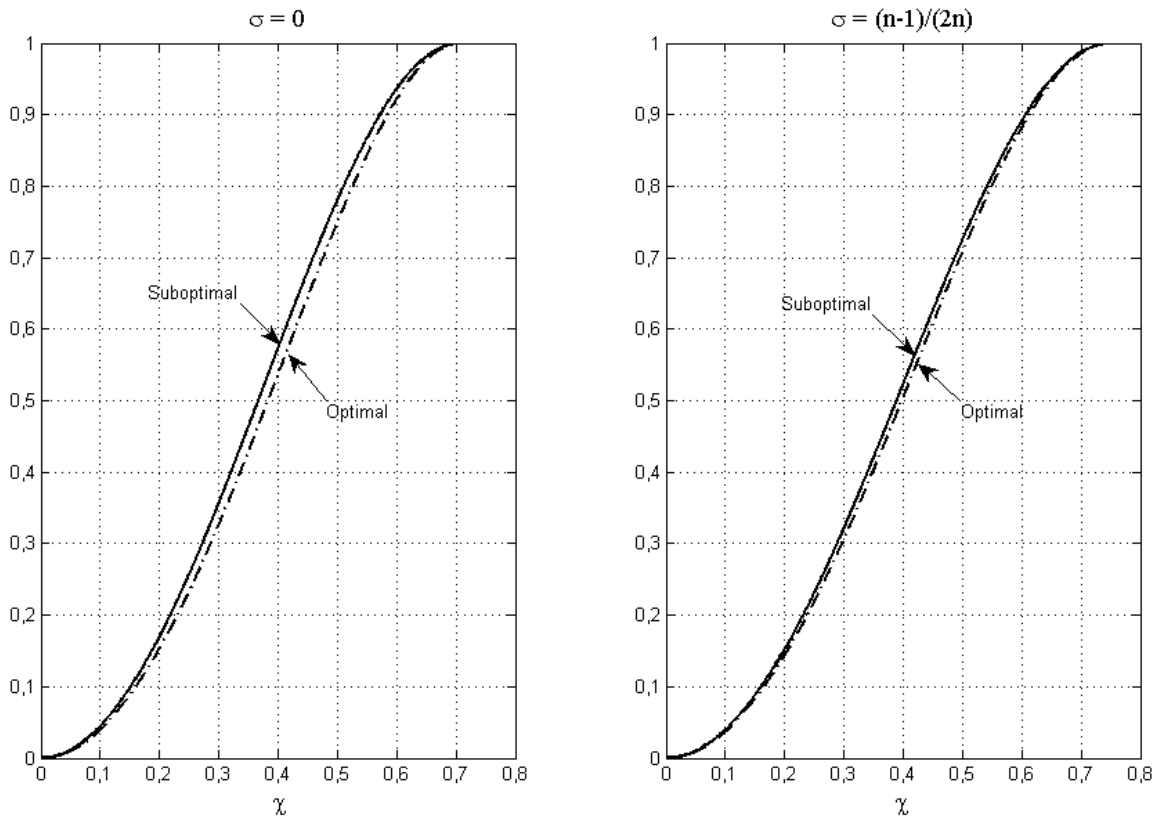


Рис. 8. Розподіл значень критерію інформативності при оптимальної і субоптимальної апроксимації перетину еліпсоїду E_{j+1} і «гіпершару» S_{j+1} .

Встановлено зв'язок між апіорним еліпсоїдом, параметрами вимірювача, максимальним значенням погрішності вимірювання, розмірністю простору стану системи і ступеню невизначеності апостеріорного еліпсоїду відносно апіорного. Це дає можливість обирати вимірювач в залежності від вимог до точності оцінки змінних стану спостережуваної системи. Для цього сформульовано і доведено наступну теорему:

Теорема. Нехай $E_{j+1} \cap S_{j+1} \neq \emptyset$. Тоді, щоб вимірювання y_{j+1} було інформативним, необхідно і достатньо щоб виконувалось $\sigma_{j+1} \leq \sqrt{\chi_{j+1}^2 - n^{-1}}$ або $\chi_{j+1} \leq \sqrt{\sigma_{j+1}^2 - n^{-1}}$.

Наслідок з теореми. Якщо $\sigma_{j+1} = 0$, тобто середина «гіпершару» S_{j+1} проходить через центр апіорного еліпсоїду E_{j+1} , то невизначеність стану, тобто об'єм апостеріорного еліпсоїду, буде менше ніж у апіорного еліпсоїду, тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність $c \leq \sqrt{n^{-1} h^T H_{j+1} h}$ або $h^T H_{j+1} h \geq c^2 n$, де n – розмірність простору станів системи (еліпсоїду).

Далі в роботі вирішується задача апроксимації перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» вимірювання за критерієм мінімуму сліду матриці апроксимуючого еліпсоїду.

З виразу для \hat{H}_{j+1} (14) на підставі властивостей функції *trace* знаходимо функціонал, подібний (15), який треба мінімізувати:

$$J(\tau_{j+1}) = \text{trace} \hat{H}_{j+1} = \text{trace} H_{j+1} (1 - \tau_{j+1} \tilde{e}_{j+1}^2) \alpha_{j+1}^2, \tilde{e}_{j+1}^2 = h^T H_{j+1}^2 h e_{j+1}^{-2} (\text{trace} H_{j+1})^{-1}. \quad (19)$$

Критерієм інформативності є відношення, подібне виразу (16):

$$\text{trace} \hat{H}_{j+1} (\text{trace} H_{j+1})^{-1} = (1 - \tau_{j+1} \tilde{e}_{j+1}^2) \alpha_{j+1}^2 \leq 1. \quad (20)$$

Відоме оптимальне рішення, отримане іншим шляхом і в інших позначеннях, можна отримати з виразу (20), продиференціювавши його по змінній τ_{j+1} , прирівнявши результат до нуля і отримавши кубічне рівняння. Рішення кубічного рівняння і знаходження єдиного кореня, що задовольняє умови $0 \leq \tau_{j+1} < 1$, є складною задачею. Також оптимальне рішення містить особливість – ділення на нуль при $\sigma_{j+1} = 0$. Це потребує стежити за наближенням σ_{j+1} до нуля і при деякому значенні переходити до іншого виразу для τ_{j+1} , що є рішенням квадратного рівняння, яке отримуємо з кубічного рівняння, поклавши $\sigma_{j+1} = 0$. Крім того, це рішення потребує для **випадку 3** перевизначити Δ_{j+1} і півширину c «гіпершару» S_{j+1} щоб отримати рішення $0 \leq \tau_{j+1} < 1$. Тому є актуальною розробка методу субоптимальної еліпсоїдальної апроксимації перетину, який не має особливостей залежно від значення σ_j і характеру перетину, а сума квадратів півосей еліпсоїду отриманої оцінки не набагато б відрізнялась від оптимального значення. Для цього запропоновано і доведено лему.

Лема 5. Оберемо вираз для кроку алгоритму наступним чином:

$$\tau_{j+1} = 1 - \chi_{j+1}^2 (\tilde{e}_{j+1}^2 + \sigma_{j+1}^2)^{-1}. \quad (20)$$

Тоді при проходженні гіперплощини – середини «гіпершару» S_{j+1} вимірювання y_{j+1} через центр апіорного еліпсоїду E_{j+1} відмова від використання вимірювання буде при тих же значеннях параметрів χ_{j+1}^2 і \tilde{e}_{j+1}^2 як при рішенні (20), так і при оптимальному рішенні.

Зауваження. Підстановка (20) в $\alpha_{j+1}^2 = 1 + \tau_{j+1}((1 - \tau_{j+1})^{-1} \chi_{j+1}^2 - \sigma_{j+1}^2)$ для обчислення $\hat{N}_{j+1} = (N_{j+1} - \tau_{j+1} e_{j+1}^{-2} N_{j+1} h h^T N_{j+1}) \alpha_{j+1}^2$ також дозволяє уникнути невизначеності $0/0$ у випадку, якщо $\chi_{j+1} \rightarrow 0$. Тоді при виборі (20) вираз для α_{j+1}^2 набуває вигляду $\alpha_{j+1}^2 = 1 + \tilde{e}_{j+1}^2$.

У четвертому розділі наведено два приклади застосування розробленого методу. Приклад з пеленгацією нерухомого об'єкту: треба уточнити в декартових координатах положення нерухомого об'єкту A , яке належить еліпсоїду E_0 , за трьома пеленгами y_j , вимірними у градусах з трьох різних точок прямої траєкторії: B_j , $j=1,2,3$, положення яких на траєкторії відомо. Це уточнення є наслідком зменшення об'єму еліпсоїда, якому належить оцінка. Пояснення дано на рис. 9.

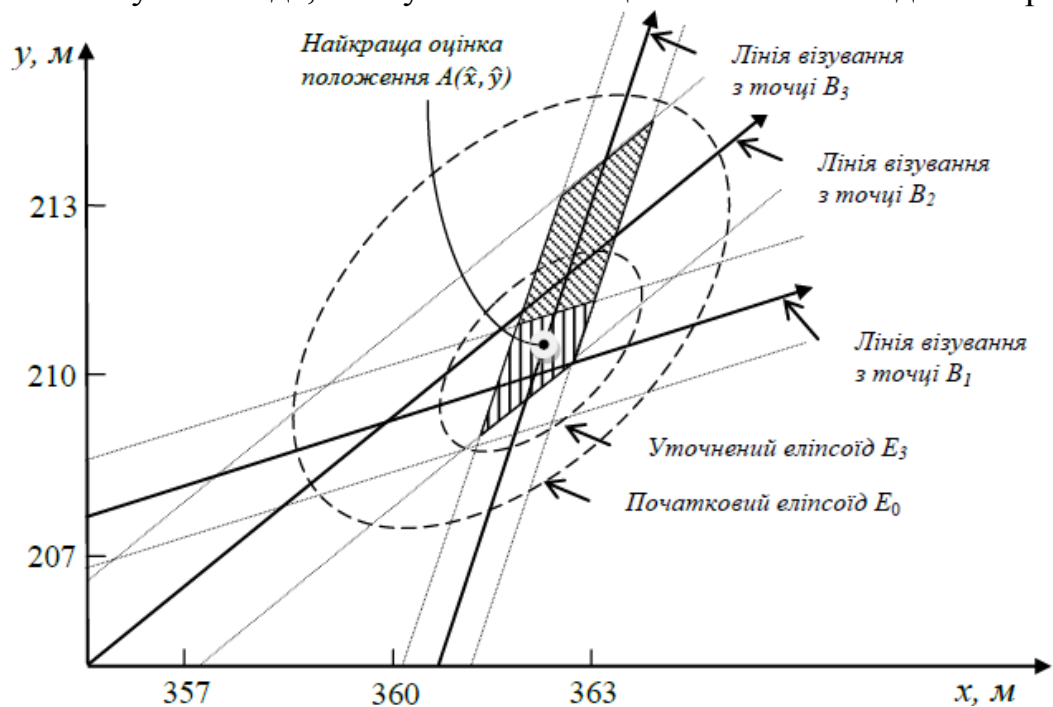


Рис. 9. Еліпсоїдальна апроксимація перетину «гіпершарів» («гіперсмуг») множин вимірювання пеленгу об'єкта.

Матриця початкового еліпсоїду: $H_0 = [9,405 \ 8,703; 8,703 \ 10,647]$; початкова точкова оцінка (центр еліпсоїду E_0) $\hat{x}_0 = 369\text{м}$, $\hat{y}_0 = 213,5\text{м}$. Рівняння вимірювання було лінеаризоване і помилка вимірювання мала розмірність $[м]$. Було обчислено точкові і еліпсоїдальні оцінки залучаючи оптимальний і субоптимальний (згідно леми 4) способи еліпсоїдального оцінювання за мінімумом об'єму, та методом найменших квадратів. Результати наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри Метод	\hat{x}_3	\hat{y}_3	Корені з власних чисел матриці (півосі еліпсу) H_3
МНК	370,5 m	214,1 m	$1\sigma = 39\% : 1,451m ; 0,392m$
Лема 4	368,7 m	213,2 m	3,999 m ; 0,744 m
Оптимальний	368,8 m	214,0 m	2,236 m ; 0,726 m

Повернув початковий еліпсоїд на 90° проти годинникової стрілки (на рис. 9 не показано), знов було проведено обчислення, результати яких наведено в табл. 2:

Таблиця 2

Параметри Метод	\hat{x}_3	\hat{y}_3	Корені з власних чисел матриці (півосі еліпсу) H_3
МНК	354 m	227,44 m	$1\sigma = 39\% : 0,38m ; 1,443m$
Лема 4	368,7 m	213,66 m	0,777 m ; 2,559 m
Оптимальний	368,34 m	214,0 m	1,007 m ; 1,545 m

Для порівняння з оцінкою МНК наведено саме півосі гарантованих еліпсоїдів, а не їх об'єм. Також похибку вимірювання для гарантованого оцінювання було збільшено у три рази. Бачимо, що розміри півосей гарантованих еліпсоїдів і еліпсоїду оцінки МНК помітно відрізняються, але точкова оцінка для усіх способів оцінювання майже співпадає у першому варіанті орієнтації початкового еліпсоїду і суттєво відрізняється для оцінки МНК у другому варіанті орієнтації початкового еліпсоїду. Але гарантовані точкові оцінки, як і в попередньому варіанті, майже співпадають. Це підтверджує стійкість гарантованої оцінки до початкових даних.

Для перевірки ефективності розробленого методу виконано комп'ютерне моделювання методу в схемі гироорбити штучного супутника Землі з подальшим застосуванням визначених змінних стану у контурі керування кутовим положенням супутника. Розглядався режим стабілізації положення супутника і керування здійснювалось за відхиленням. В рівнянні (1) прийнято: $x_j^T = [\phi_j, \psi_j]$, де: ϕ_j – кут крену, який вимірюється інфрачервоним побудувачем місцевої вертикалі (ПМВ); ψ_j

– кут курсу, який треба оцінювати; матриця $A = \exp(\Omega \Delta t)$, де $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ors} \\ \omega_{ors} & 0 \end{bmatrix}$, ω_{ors}

– абсолютна кутова швидкість обертання орбітальної системи координат навколо осі, перпендикулярної площині орбіти супутника (вважається, що орбіта не прецесіює); Δt – малий проміжок часу, на якому керування кутовим положенням супутника є постійним; $Bu_j = [\omega_x, \omega_y]^T \Delta t$ – керування, де ω_x, ω_y – потрібні абсолютні кутові швидкості повороту супутника на малі кути навколо зв'язаних с супутником осей x, y ; дія зовнішнього збурення враховується тільки по змінній ψ_j ,

оскільки змінна ϕ_j вимірюється безпосередньо: $f^T = [0, 1]$, $\zeta_j = \omega_{\text{drift}, y} \Delta t$, $\omega_{\text{drift}, y} = 0,02^\circ / c$ – дрейф давача кутової швидкості (ДКС).

В рівнянні (11) маємо: $h^T = [1, 0]$, η_j – помилка вимірювання ПМВ кута крену.

Шукану $\hat{\psi}_j$ отримано з застосуванням виразів (13), (17) і (20). Далі отримана оцінка наряду з безпосередньо виміряними ПМВ кутами крену ϕ_j і тангажу θ_j йде до регулятора у контурі керування, в якому формується сигнал керування супутником. Моделювалось два закони керування, взяті з сучасних публікацій. Різниця щодо стійкості замкненої керованої системи, що залежить у тому числі і від точності оцінки стану керованої системи, не виявлено. Тому у роботі наведено графіки оцінених змінних для одного закону керування. На рис. 10 наведено графік оцінювання ψ_j за один виток супутника по орбіті протягом $T = 5678c$, при $|\eta_j| \leq 1'$, на рис. 11 наведено графік оцінювання ψ_j при $|\eta_j| \leq 4'$. Далі моделювалось порушення апіорних припущень щодо погрішності вимірювання кута ϕ_j і, хоч безпосередньо це не стосується оцінювання кута ψ_j , кута тангажу θ_j : при переході супутника у тінь від Землі при русі по орбіті погрішність вимірювання дуже швидко змінюється з $|\eta_j| \leq 1'$ до $|\eta_j| \leq 4'$. Результати наведено на рис. 12

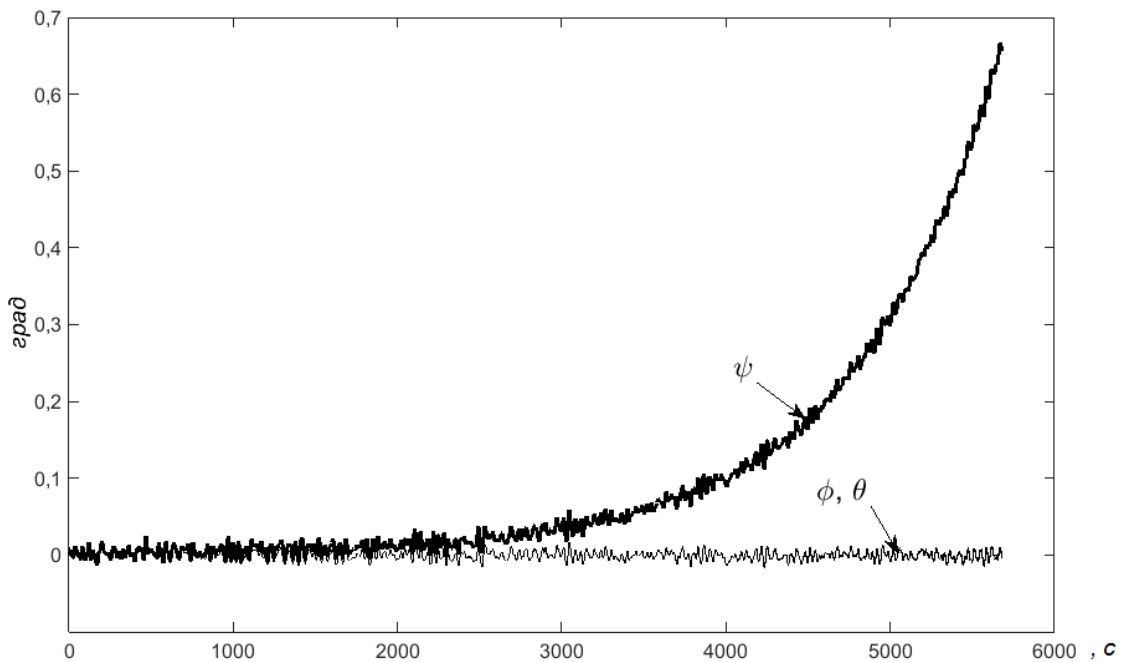


Рис. 10. Розподіл значень кутів за один виток супутника на орбіті при $|\eta_j| \leq 1'$

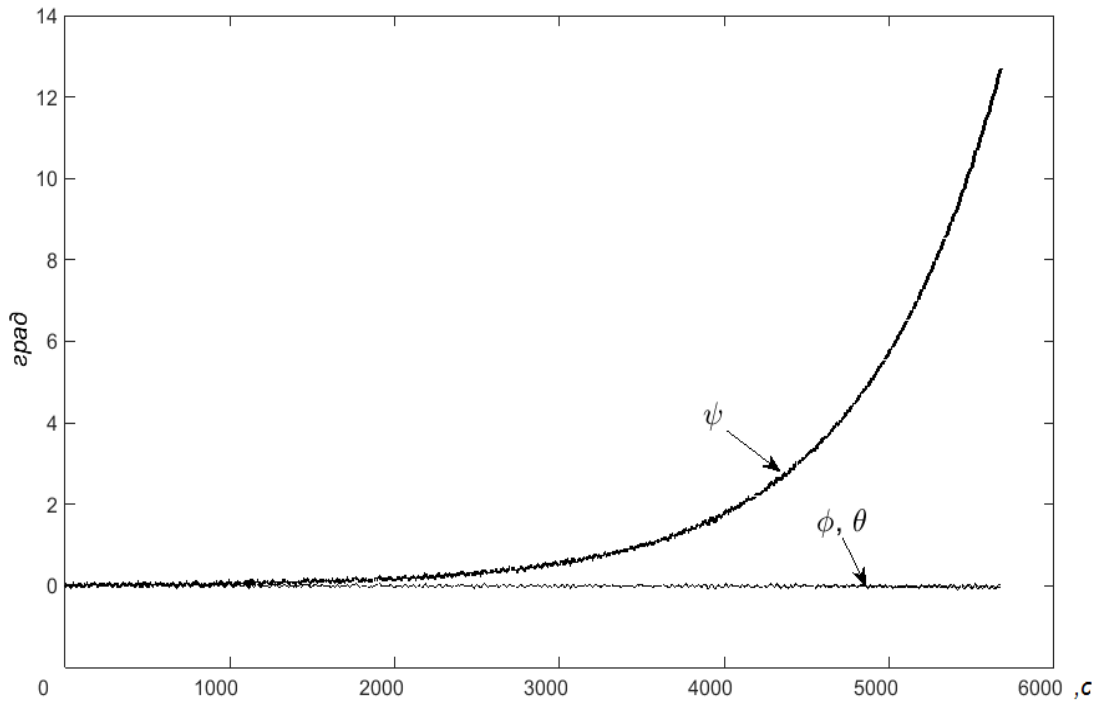


Рис. 11. Розподіл значень кутів за один виток супутника на орбіті при $|\eta_j| \leq 4'$.

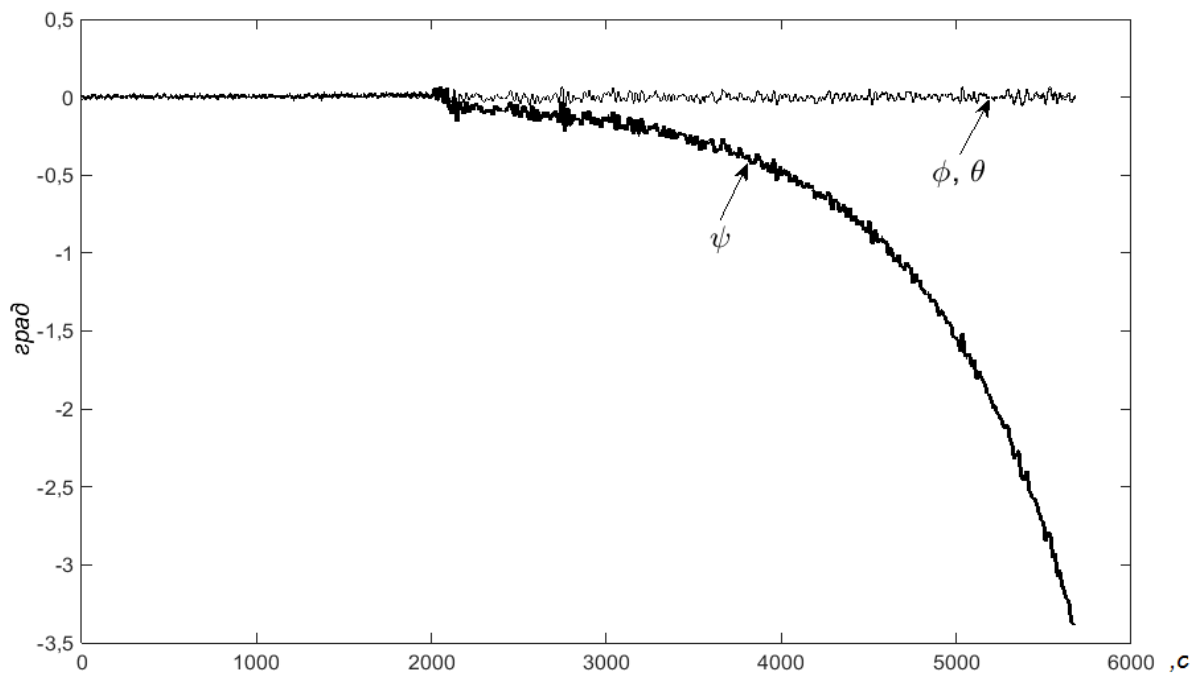


Рис. 12. Розподіл значень кутів за один виток супутника на орбіті при зміні з $|\eta_j| \leq 1'$ до $|\eta_j| \leq 4'$.

Бачимо, що оцінювання розробленим методом є ефективним: Добуток $T \cdot \omega_{\text{drift}, y} = 5678c \cdot 0,02^\circ / c = 113,56^\circ$ – це можлива похибка стабілізації при керуванні з допомогою кутів, які отримані інтегруванням кутової швидкості з ДКС, тоді як при керуванні кутовим положенням супутника через оцінку курсового кута маємо похибку менш ніж $0,7^\circ$ при $|\eta_j| \leq 1'$ (рис. 10) і $\approx 13^\circ$ при $|\eta_j| \leq 4'$ (рис. 11). При порушенні апріорних припущень щодо погрішності вимірювання змінної стану оцінювання стану системи продовжується, параметри перевизначаються, керування кутовим положенням супутника зберігається і залишається стійким (рис. 12).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена проблема оцінювання станів лінійних керованих систем шляхом розробки методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних систем зі скалярними входом і виходом в умовах невизначеності.

Одержано такі результати:

1. Проаналізовано літературу щодо обґрунтування актуальності теми дослідження: розвиток методів оцінювання; альтернативні та суміжні методи оцінювання; сучасний стан гарантованого оцінювання; умови, за яких застосування гарантованих методів є безальтернативним; переваги і недоліки саме еліпсоїдального оцінювання порівняно з іншими методами гарантованого оцінювання; практичне застосування еліпсоїдального оцінювання.
2. Розроблено метод еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським еліпсоїду початкового стану і відрізка за двома критеріями: за об'ємом і за сумою квадратів півосей еліпсоїду, що апроксимує множину досяжності лінійної системи.
3. Розроблено субоптимальний метод еліпсоїдальної апроксимації.
4. Формалізовано умови «сумісності» двох множин: множини вимірювання стану системи – «гіпершару» і множини досяжності – еліпсоїду.
5. Розроблено робастну властивість еліпсоїдального оцінювання шляхом адаптивного збільшення апріорного обмеження погрішності вимірювання у випадку настання «несумісності».
6. Розроблено спосіб субоптимальної еліпсоїдальної апроксимації перетину двох множин: досяжності і вимірювання системи, в якому мінімізується або об'єм, або сума квадратів півосей еліпсоїду оцінки.
7. Досліджено зв'язок між параметрами вимірювача, погрішністю вимірювання, розмірністю простору стану системи і мінімально можливою ступеню невизначеності стану системи, яку можна за таких умов отримати у вигляді мінімального за об'ємом еліпсоїду оцінки.
8. Застосовано розроблений метод оцінювання для вирішення задачі визначення положення нерухомого об'єкту за декількома його пеленгами і задачі оцінювання параметрів орієнтації штучного супутника Землі.
9. За розробленим методом оцінювання розроблено комп'ютерні моделі та інженерні методики оцінювання станів конкретних технічних систем, які застосовано у виробництві складних технічних виробів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К задаче гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы, *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2005. № 4. С. 44-51. Здобувачем доведено твердження щодо оптимальних значень параметрів, які мінімізують еліпсоїд, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи, яка є сумою за Мінковським

початкового еліпсоїду стану і відрізка – множини зовнішнього збурення. Також здобувачем розроблено математичну та комп'ютерну моделі цієї апроксимації та проведено комп'ютерне моделювання для порівняння з уже відомим способом апроксимації.

2. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 1. С. 16-25. (Входить у наукометричну базу даних Scopus). (Особистий внесок – доведено лему про покриття перетину еліпсоїду і «гіпершару»).
3. Шолохов А. В. Субоптимальная аппроксимация суммы эллипсоидов и пересечения эллипсоида с гиперслоем. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 3. С. 78-87.
4. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. О связи параметров множества возможных состояний наблюдаемой системы с параметрами измерительного устройства и размерностью пространства состояний системы. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. № 4. С. 96-103. (журнал індексується наукометричними базами DOAJ, Index Copernicus, EBSCO, Google Scholar, ПІНЦ, ВІНІТІ, українським реферативним журналом «Джерело», українською реферативною базою даних «Україніка наукова», науковою періодикою України). (Особистий внесок – висунута і доведена теорема про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів еліпсоїдального оцінювання).
5. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. №1. С.96-105. |DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10559-019-00114-x> (Входить у наукометричну базу даних Scopus). (Особистий внесок – вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням: висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апіорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі).
6. Oleksii V. Sholokhov. Investigation and simulating of algorithm of building of set of attainability of linear controlled system. 2007. *4th IEEE Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. IDAACS 2007* | conference-paper | DOI: [10.1109/IDAACS.2007.4488439](https://doi.org/10.1109/IDAACS.2007.4488439) EID: 2-s2.0-50149093918

7. Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы: Школа-семинар для молодых ученых: «Научные космические исследования». 7-13 вересня 2006р., м. Євпаторія.
8. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы: XXV научно-техническая конференция памяти Н. Н. Острякова. 10-12 октября 2006г, г. Санкт-Петербург, Россия.
9. Шолохов А. В. Исследование эллипсоидальной аппроксимации пересечения эллипсоида с гиперслоем по критерию минимума объема: Международная научно-техническая конференция: «Інтелектуальні системи прийняття рішень і прикладні аспекти інформаційних технологій» (ISDMIT'2007). 15-18 травня 2007р., м. Євпаторія.
10. Шолохов А. В. Оценивание параметров ориентации космического аппарата и погрешностей датчиков системы ориентации алгоритмом эллипсоидального гарантированного оценивания: 1-а Всеукраїнська науково-технічна конференція «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 11-12 грудня 2014р., м. Харків.
11. Шолохов А. В. Ориентация микроспутника с помощью робастного алгоритма эллипсоидального оценивания: 15-та Українська конференція з космічних досліджень. 24-28 серпня 2015р., м. Одеса.
12. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли: 2-а Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 06-07 грудня 2018р., м. Харків.

АНОТАЦІЯ

Шолохов О. В. Робастне гарантоване еліпсоїдальне оцінювання станів лінійних керованих систем з обмеженими збуренням та завадою. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» МОН України, Київ, 2019 р.

В дисертації розроблено метод робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем з обмеженими збуренням та завадою вимірювання змінних стану в умовах нестатистично заданої невизначеності, робастний при порушенні апріорних припущень щодо зовнішнього збурення і похибки вимірювання змінної стану системи, що збурюється по одному каналу і спостерігається за однією змінною. Метод складається з послідовних етапів, на кожному з яких висовуються та доводяться твердження методу оцінювання. В кінці

дано вирішення задачі оцінювання положення нерухомого об'єкту та задачі оцінювання кутової орієнтації штучного супутника Землі. На підставі розробленого методу оцінювання було створено і впроваджено у виробництво методики оцінювання станів технічних виробів в процесі їх налаштування для підвищення їх технічних та експлуатаційних характеристик.

Ключові слова: лінійна керована спостережувана система; фазовий простір станів; зовнішнє збурення; множина досяжності; сума множин за Мінковським; еліпсоїдальна апроксимація; оператор стискання; завада вимірювання; похибка вимірювання; «гіпершар»; перетин множин; робастність; порушення апріорних припущень; багатовимірний об'єм еліпсоїду; слід матриці еліпсоїду.

АННОТАЦИЯ

Шолохов А. В. Робастное эллипсоидальное оценивание состояний линейных управляемых систем с ограниченными возмущением и помехой. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН Украины, Киев, 2019.

В диссертации разработан метод робастного эллипсоидального оценивания состояний линейных управляемых систем с ограниченными возмущением и помехой в условиях нестатистически заданной неопределенности, робастный к нарушениям априорных предположений относительно внешнего возмущения и погрешности измерения переменной состояния системы, возмущаемой по одному каналу и наблюдаемой по одной переменной. Метод состоит из последовательных этапов, на каждом из которых вводятся и доказываются утверждения метода оценивания. В конце дано решение задачи оценивания положения неподвижного объекта и задачи оценивания угловой ориентации искусственного спутника Земли. На основе разработанного метода оценивания были созданы и внедрены в производство методики оценивания состояний технических изделий в процессе их настройки для повышения их технических и эксплуатационных характеристик.

Ключевые слова: линейная управляемая наблюдаемая система; фазовое пространство состояний; внешнее возмущение; множество достижимости; сумма множеств по Минковскому; эллипсоидальная аппроксимация; оператор сжатия; помеха измерения; ошибка измерения; «гиперслой»; пересечение множеств; робастность; нарушение априорных предположений; многомерный объем эллипсоида; след матрицы эллипсоида.

ABSTRACT

Sholokhov O. V. Robust Ellipsoidal Estimation of the States of Linear Controlled Systems with the Limited Disturbance and Interference. – Manuscript.

Thesis for a scientific degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences in specialty 01.05.04 – System Analysis and Theory of Optimal Solutions. – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2019.

The thesis describes a method developed for robust ellipsoidal estimation in the phase space of the states of linear controlled systems with the limited disturbance and interference. At the same time, the estimated systems operate under conditions of non-statistically specified uncertainty. External disturbance in such systems is assumed to affect only via one channel, and disturbance via other channels can be neglected. Only one state variable is measured, that is, the system shall be observed by this variable. Measurement of the variable contains an additive error being a result of intrinsic noise of the meter or organized jamming. The estimation method is robust as regards violations of a priori assumptions in respect of restrictions on external disturbance and measurement error of state variable of the system. Development of the method consists of five successive stages.

At the first stage, a system analysis of the assessment problem under conditions of uncertainty is carried out and main tasks to be solved in the process of development of the estimation method are determined. These tasks in the thesis are considered each at a certain stage. So, at the next second stage, a method for the optimal ellipsoidal approximation of a set of attainability of the linear dynamical system under consideration has been developed. A set of attainability of the system itself has been determined by the Minkowski sum of two sets – an initial ellipsoidal set of probable states of the system and a set of probable values of external disturbance affecting the system. As the disturbance affects only one channel, a set of its probable values is a segment. A subsequent approximation of the sum of these two sets by a minimum volume criterion has been carried out with the use of contraction operator. Optimality of approximation has been proved on the basis of a preliminary lemma and a statement.

At the second stage, a method of suboptimal approximation based on the Kantorovich inequality has been proposed. This enables to reduce the number of calculations required for obtaining an approximation. It has been demonstrated that in the particular case occurring most frequently in practice, the suboptimal solution provides an optimal approximation.

At the third and fourth stages, probable violation cases of a priori assumptions about external disturbance boundaries and measurement interference have been investigated, and a method for giving robustness to the estimation method by adapting to a change in measurement interference limit has been developed. The geometric representation of two sets, – a priori ellipsoid and a set of possible measurements of one variable representing a “hyperlayer” in the state space, has been used for the investigation. All possible cases of mutual arrangement of these two sets have been given.

At the fifth stage, the problem of using measurements for specification of a state of the observable system has been solved. It represents an ellipsoidal approximation of the intersection of two sets – a priori ellipsoid and a “hyperlayer” of dimensions. To solve this problem the auxiliary lemmas, which have been proved, are used. The minimization criteria are either a volume or a trace of matrix of the estimation ellipsoid. It is proved that the proposed solutions converge to the optimal solutions for both criteria. As opposed to the optimal solutions, the suboptimal solutions have a robustness property as regards the parameter values of two intersected sets, and at the same time they are much simpler.

At the sixth stage, the obtained solution has been investigated, and a theorem on the relation between parameters of a priori ellipsoid, a boundary of measurement noise and a

specific measured variable has been proved. In practical tasks this enables to formulate the requirements for measuring tools on the board of the object whose state shall be estimated with the required accuracy.

At the last stage, the tasks of estimation of the position of a stationary object and angular orientation of an artificial Earth satellite have been solved.

Based on the developed estimation method the methods for assessment of states of technical products in the process of their adjustment for improvement of their technical and operational characteristics have been created and implemented into production.

Keywords: linear controlled observable system; phase space of states; external disturbance; set of attainability; Minkowski sum of sets; ellipsoidal approximation; contraction operator; measurement interference; hyperlayer; intersection of sets; robustness; violation of a priori assumptions; multidimensional volume of an ellipsoid; trace of matrix of an ellipsoid.